Total No. of Printed Pages—8

5 SEM FYUGP MTHC5A

2025

(November)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC5A

(Multivariate Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. (a) $w = xy\log z$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ উল্লেখ কৰা। 1

State the domain of the function $w = xy\log z$.

(b) (x, y, z)ত f ফলনৰ সমতল পৃষ্ঠৰ সংজ্ঞা লিখা। 1

Define level surface of the function f at (x, y, z).

(c) দেখুওৱা যে

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

সকলো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন, মূলবিন্দু (0, 0) বাদে। 3

Show that

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at every point, except the origin (0, 0).

অথবা / Or

দেখুওৱা যে $f(x, y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ ফলনৰ কোনো সীমা নাই, যেতিয়া (x, y), (0, 0)ৰ কাষ চাপে।

Show that the function $f(x, y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ has no limit as (x, y) approaches (0, 0).

(d) যদি $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$, তেন্তে (4, −5) বিন্দুত $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ আৰু $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the values of $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ at the point (4, −5), if $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$.

(e) যদি $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$ হয়, তেন্তে (0, 0, 0) বিন্দুত $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ আৰু $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। 3

Find the values of $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ and $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ at (0, 0, 0), if $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$.

অথবা / Or

(2, 0) বিন্দুত $f(x, y) = xe^x + \cos(xy)$ৰ $\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ দিশত অৱকলজ উলিওৱা।

Find the derivative of $f(x, y) = xe^x + \cos(xy)$ at the point (2, 0) in the direction of $\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$.

(f) $z = x\cos y - ye^x$ৰ (0, 0, 0)ত পৃষ্ঠৰ স্পৰ্শক সমতল উলিওৱা। 2

Find the tangent plane to the surface $z = x\cos y - ye^x$ at (0, 0, 0).

(g) যদি $f(x, y)$ৰ আদিক্ষেত্ৰৰ এটা বিন্দু (a, b)ত এটা স্থানীয় চৰম মান থাকে আৰু যদি তাত প্ৰথম আংশিক অৱকলজ থাকে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $f_x(a, b) = 0$ আৰু $f_y(a, b) = 0$. 3

If $f(x, y)$ has a local extremum value at a point (a, b) of its domain and if the first partial derivative exists there, then prove that $f_x(a, b) = 0$ and $f_y(a, b) = 0$.

অথবা / Or

$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ ফলনৰ স্থানীয় চৰম মানসমূহ উলিওৱা।

Find the local extreme values of the function

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

(h) $2x+y-z-5=0$ সমতলৰ ওপৰত $P(x, y, z)$ বিন্দুটো উলিওৱা যিয়ে মূলবিন্দুৰ আটাইতকৈ ওচৰত থাকে। 4

Find the point $P(x, y, z)$ on the plane $2x+y-z-5=0$ that is closest to the origin.

অথবা / Or

বৃত্ত $x^2+y^2=1$ৰ ওপৰত $f(x, y)=3x+4y$ ফলনৰ সৰ্বোচ্চ আৰু ন্যূনতম মান উলিওৱা।

Find the maximum and minimum values of the function $f(x, y)=3x+4y$ on the circle $x^2+y^2=1$.

2. (a) অনুকল $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\, dy\, dx$ৰ বাবে অনুকলন অঞ্চলটো অংকন কৰা। 1

Sketch the region of integration for the integral

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\, dy\, dx$$

(b) $\iint_R xy\, dx\, dy$ উলিওৱা, য'ত R হৈছে বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$ৰ এক-চতুৰ্থাংশ য'ত $x \geq 0$ আৰু $y \geq 0$. 3

Evaluate $\iint_R xy\, dx\, dy$, where R is the quadrant of the circle $x^2+y^2=a^2$, where $x \geq 0$ and $y \geq 0$.

(c) ফিউবিনি'ৰ প্ৰথম প্ৰকাৰৰ উপপাদ্য উল্লেখ কৰা। 1

State Fubini's theorem of first form.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\, dy\, dx = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

য'ত R হৈছে x-অক্ষ আৰু $y=\sqrt{1-x^2}$ বক্ৰৰ দ্বাৰা সীমাবদ্ধ অৰ্ধবৃত্তাকাৰ অঞ্চল। 3

Prove that

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\, dy\, dx = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

where R is the semicircular region bounded by the x-axis and the curve $y=\sqrt{1-x^2}$.

(e) গোলক $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ৰ বাবে গোলাকাৰ স্থানাংক সমীকৰণটো উলিওৱা। 4

Find a spherical coordinate equation for the sphere $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

অথবা / Or

মান নিৰ্ণয় কৰা :

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3-r^2}} dz\, r\, dr\, d\theta$$

(f) $z=x^2+3y^2$ আৰু $z=8-x^2-y^2$ পৃষ্ঠৰ দ্বাৰা আবৃত D অঞ্চলটোৰ আয়তন উলিওৱা। 4

Find the volume of the region D enclosed by the surfaces $z = x^2 + 3y^2$ and $z = 8 - x^2 - y^2$.

3. (a) এটা ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰৰ ৰেখা অনুকলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define line integrals of a vector field.

(b) হেলিক্চ $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k},\ 0 \le t \le \pi$ ৰ ওপৰেৰে যোৱা $f(x, y, z) = 2xy + \sqrt{z}$ ৰ ৰেখা অনুকলন উলিওৱা। 3

Find the line integral of $f(x, y, z) = 2xy + \sqrt{z}$ over the helix $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k},\ 0 \le t \le \pi$.

(c) এটা বস্তুৰ বক্ৰ $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k},\ 0 \le t \le 1$ ৰ কাষেৰে (0, 0, 0) পৰা (1, 1, 1) লৈ স্থানান্তৰ কৰোঁতে বলক্ষেত্ৰ $\vec{F} = (y - x^2)\hat{i} + (z - y^2)\hat{j} + (x - z^2)\hat{k}$ দ্বাৰা কৰা কাম উলিওৱা। 4

Find the work done by the force field $\vec{F} = (y - x^2)\hat{i} + (z - y^2)\hat{j} + (x - z^2)\hat{k}$ in moving an object along the curve $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k},\ 0 \le t \le 1$, from (0, 0, 0) to (1, 1, 1).

অথবা / Or

বৃত্ত $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j},\quad 0 \le t \le 2\pi$ ৰ চাৰিওফালে $\vec{F} = (x - y)\hat{i} + x\hat{j}$ ক্ষেত্ৰৰ প্ৰচলন উলিওৱা।

Find the circulation of the field $\vec{F} = (x - y)\hat{i} + x\hat{j}$ around the circle $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j},\ 0 \le t \le 2\pi$.

(d) ৰেখা অনুকলনৰ মৌলিক উপপাদ্য প্ৰমাণ সহকাৰে উল্লেখ কৰা। 5

State and prove the fundamental theorem of line integral.

অথবা / Or

$\int_1^2 \int_{1/y}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}}\, dx\, dy$ অনুকলনটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

Evaluate the integral $\int_1^2 \int_{1/y}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}}\, dx\, dy$.

4. (a) $\vec{F} = xz\hat{i} - xy\hat{j} - z\hat{k}$ ৰ প্ৰবাহৰ ঘনত্ব উলিওৱা। 1

Find the flux density of $\vec{F} = xz\hat{i} - xy\hat{j} - z\hat{k}$.

(b) অধিবৃত্তাকাৰ চুঙা $y = x^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 4$ ৰ মাজেৰে যোৱা $\vec{F} = yz\hat{i} + x\hat{j} - z^2\hat{k}$ ৰ প্ৰবাহ উলিওৱা। 2

Find the flux of $\vec{F} = yz\hat{i} + x\hat{j} - z^2\hat{k}$ through the parabolic cylinder $y = x^2$, $0 \le x \le 1, 0 \le z \le 4$.

(c) গ্ৰীনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি

$$\oint_C \{(\cos x \sin y - xy)\, dx + \sin x \cos y\, dy\}$$ৰ

মান উলিওৱা, য'ত C হ'ল xy-সমতলৰ ধনাত্মক দিশত বৰ্ণনা কৰা বৃত্ত $x^2 + y^2 = 1$. 3

Evaluate by Green's theorem

$$\oint_C \{(\cos x \sin y - xy)\, dx + \sin x \cos y\, dy\}$$

where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$ in the xy-plane described in the positive.

(d) ষ্টোকচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ৰ মান উলিওৱা, যদি $\vec{F} = x^2\hat{i} + 2x\hat{j} + z^2\hat{k}$ আৰু C হ'ল xy-সমতলৰ উপবৃত্ত $4x^2 + y^2 = 4$, যেতিয়া ওপৰৰ পৰা ঘড়ীৰ কাটাৰ বিপৰীত দিশে চোৱা হয়। 5

Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ by using Stokes' theorem, if $\vec{F} = x^2\hat{i} + 2x\hat{j} + z^2\hat{k}$ and C is the ellipse $4x^2 + y^2 = 4$ in the xy-plane, counterclockwise when viewed from above.

অথবা / *Or*

ডাইভাৰজেন্স উপপাদ্য প্ৰমাণ সহকাৰে উল্লেখ কৰা।

State and prove divergence theorem.

★★★