

Total No. of Printed Pages—8

**4 SEM FYUGP MTHC4C**

**2025**

( June )

**MATHEMATICS**

( Core )

Paper : MTHC4C

**( Ring Theory and Linear Algebra I )**

*Full Marks : 60*

*Time : 2 hours*

*The figures in the margin indicate full marks  
for the questions*

1. (a) বিং এটাত এককৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1  
Define unity in a ring.
- (b) এটা বিঙৰ উপসংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া যি যোগৰ সাপেক্ষে  
এটা উপগোট কিন্তু উপবিং নহয়। 2  
Give an example of a subset of a ring that  
is a subgroup under addition but not a  
subring.
- (c) এটা সসীম অখণ্ড ড'মেইন এটা ক্ষেত্র বুলি প্রমাণ কৰা। 3  
Prove that a finite integral domain is a  
field.

( 2 )

- (d) এটা বিভব বৈশিষ্ট্য সংজ্ঞায়িত কৰা। ধৰা হওক  $R$  একক 1 থকা এটা আঙঠি। প্রমাণ কৰা যে যদি 1ৰ যোগৰ অধীনত অসীম ক্রম থাকে, তেন্তে  $R$ ৰ বৈশিষ্ট্য 0 আৰু যদি 1ৰ যোগৰ অধীনত  $n$  ক্রম থাকে, তেন্তে  $R$ ৰ বৈশিষ্ট্য  $n$ .

2+3=5

Define characteristic of a ring. Let  $R$  be a ring with unity 1. Prove that if 1 has infinite order under addition, then the characteristic of  $R$  is 0 and if 1 has order  $n$  under addition, then the characteristic of  $R$  is  $n$ .

নাইবা / Or

Prime Ideal আৰু Maximal Idealৰ সংজ্ঞা দিয়া।  $R$ ক একক থকা এটা কমিউটেটিভ ৰিং বুলি ধৰা হওক আৰু  $A$ ক  $R$ ৰ ideal. প্রমাণ কৰা যে  $R/A$  এটা integral domain যদি আৰু কেৱল যদি  $A$  মৌলিক হয়।

5

Define Prime Ideal and Maximal Ideal. Let  $R$  be a commutative ring with unity and let  $A$  be an ideal of  $R$ . Then prove that  $R/A$  is an integral domain if and only if  $A$  is prime.

2. (a) “ধৰা হওক  $R$  বৈশিষ্ট্য 2ৰ এটা বিনিময় ৰিং। তেতিয়া  $a \rightarrow a^2$  মেপিং  $R$ ৰ পৰা  $R$  লৈ আঙঠি সমৰূপতা নহয়।” সত্য নে অসত্য লিখা।

1

“Let  $R$  be a commutative ring of characteristic 2. Then the mapping  $a \rightarrow a^2$  is not a ring homomorphism from  $R$  to  $R$ .” State True or False.

P25/1394

(Continued)

( 3 )

- (b) ধৰা হওক  $R$  এটা একক 1 থকা এটা আঙঠি।  $n \rightarrow n \cdot 1$  দ্বাৰা দিয়া মেপিং  $f : Z \rightarrow R$  এটা বিভব সমৰূপতা বুলি প্রমাণ কৰা।

3

Let  $R$  be a ring with unity 1. Prove that the mapping  $f : Z \rightarrow R$  given by  $n \rightarrow n \cdot 1$  is a ring homomorphism.

- (c)  $Z \oplus Z$ ৰ পৰা  $Z$  লৈ সকলোবোৰ বিভব সমৰূপতা উলিওৱা।

3

Determine all ring homomorphisms from  $Z \oplus Z$  to  $Z$ .

- (d) ধৰা হওক  $D$  এটা অবিচ্ছেদ্য ড'মেইন। প্রমাণ কৰা যে এটা ক্ষেত্ৰ  $F$  আছে য'ত  $D$ ৰ সমৰূপী এটা উপৰিং থাকে।

4

Let  $D$  be an integral domain. Then prove that there exists a field  $F$  that contains a subring isomorphic to  $D$ .

নাইবা / Or

$R$ ক একক থকা এটা ৰিং আৰু  $R$ ৰ  $S$ ৰ ওপৰত এটা বিভব সমৰূপতা বুলি ধৰা হওক য'ত  $S$ ৰ এটাতকৈ অধিক মৌল আছে।  $S$ ৰ এটা একক আছে বুলি প্রমাণ কৰা।

Let  $R$  be a ring with unity and let  $\phi$  be a ring homomorphism from  $R$  onto  $S$  where  $S$  has more than one element. Prove that  $S$  has a unity.

P25/1394

(Turn Over)

( 4 )

(e) যদি  $R$  একক থকা বিং আৰু  $R$ ৰ বৈশিষ্ট্য  $n > 0$  হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  $R$  ত  $Z_n$ ৰ সমকণী এটা উপবিং থাকে আৰু যদি  $R$ ৰ বৈশিষ্ট্য  $0$  হয়, তেন্তে  $R$ ত  $Z$ ৰ সমকণী এটা উপবিং থাকে।

4

If  $R$  is a ring with unity and the characteristic of  $R$  is  $n > 0$ , then prove that  $R$  contains a subring isomorphic to  $Z_n$  and if the characteristic of  $R$  is  $0$ , then  $R$  contains a subring isomorphic to  $Z$ .

(f) যদি  $F$  বৈশিষ্ট্য  $p$ ৰ এটা ক্ষেত্র হয়, তেন্তে  $F$ ত এটা  $Z_p$ ৰ সমকণী উপক্ষেত্র থাকে। যদি  $F$ ,  $0$  বৈশিষ্ট্যৰ এটা ক্ষেত্র হয়, তেন্তে  $F$ ত পৰিমেয় সংখ্যাৰ সমকণী এটা উপক্ষেত্র থাকে।

4

If  $F$  is a field of characteristic  $p$ , then  $F$  contains a subfield isomorphic to  $Z_p$ . If  $F$  is a field of characteristic  $0$ , then show that  $F$  contains a subfield isomorphic to the rational numbers.

নাইবা / Or

ধৰা হওক  $n$ ৰ দশমিক উপস্থাপন  $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ . প্রমাণ কৰা যে  $n$ ,  $11$ ৰে বিভাজ্য হ'ব যদি আৰু যদিহে  $a_0 - a_1 + a_2 - \dots - (-1)^k a_k$ ,  $11$ ৰে বিভাজ্য হয়।

Let  $n$  be an integer with decimal representation,  $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ . Prove that  $n$  is divisible by  $11$  if and only if  $a_0 - a_1 + a_2 - \dots - (-1)^k a_k$  is divisible by  $11$ .

P25/1394

(Continued)

( 5 )

3. (a) যদি  $S$  এটা বৈশিষ্ট্যৰে নিৰ্ভৰশীল ভেক্টৰ গোট, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  $S$ ত থকা এটা ভেক্টৰ আনবোৰৰ বৈখিক সংমিশ্রণ।

3

If  $S$  is a linearly dependent set of vectors, prove that one of the vectors in  $S$  is a linear combination of the others.

(b) যদি  $V$ ,  $5$  মাত্রাৰ  $F$ ৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান আৰু  $U$  আৰু  $W$ ,  $3$  মাত্রাৰ  $V$ ৰ উপভেক্টৰ স্থান হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  $U \cap W \neq \{0\}$ .

4

If  $V$  is a vector space over  $F$  of dimension  $5$  and  $U$  and  $W$  are subspaces of  $V$  of dimension  $3$ , prove that  $U \cap W \neq \{0\}$ .

নাইবা / Or

প্রমাণ কৰা যে  $n$  মাত্রাৰ  $F$ ৰ ওপৰত এটা সসীম-মাত্রিক ভেক্টৰ স্থান  $V$ ৰ  $(n+1)$  বা তাতকৈ অধিক ভেক্টৰ স্থানৰ প্রতিটো গোট বৈখিকভাৱে নিৰ্ভৰশীল।

Prove that each set of  $(n+1)$  or more vectors of a finite-dimensional vector space  $V$  over  $F$  dimension  $n$  is linearly dependent.

(c) ভেক্টৰ স্থানৰ ভিত্তি নিৰ্ধাৰণ কৰা। যদি  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  আৰু  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  দুয়োটা  $F$  ক্ষেত্রৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান  $V$ ৰ ভিত্তি হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  $m = n$ .

4

If  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  and  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  are both bases of a vector space  $V$  over a field  $F$ , then prove that  $m = n$ .

P25/1394

(Turn Over)

( 6 )

নাইবা / Or

যদি  $U$  এটা সসীম-মাত্রিক ভেক্টৰ স্থান  $V$ ৰ এটা সঠিক উপস্থান হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে  $U$ ৰ মাত্রা  $V$ ৰ মাত্রাতকৈ কম।

If  $U$  is a proper subspace of a finite-dimensional vector space  $V$ , show that the dimension of  $U$  is less than the dimension of  $V$ .

4. (a)  $F$ ৰ ওপৰত  $V$  আৰু  $W$  ভেক্টৰ স্থানৰ বাবে একক আৰু শূন্য ৰূপান্তৰ সংজ্ঞায়িত কৰা।  $1+1=2$

Define identity and zero transformations for the vector spaces  $V$  and  $W$  over  $F$ .

- (b) ভেক্টৰ স্থানৰ বৈধিক ৰূপান্তৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱাওক যে মেপিং  $T: (a, b) \rightarrow (a+2, b+3)$   $\mathbb{R}^2$ ৰ ওপৰত  $V$ ৰ বৈধিক ৰূপান্তৰ নহয়।  $1+3=4$

Define linear transformation of a vector space. Show that the mapping  $T: (a, b) \rightarrow (a+2, b+3)$  of  $V$  over  $\mathbb{R}^2$  into itself is not a linear transformation.

- (c)  $T$  হৈছে  $V$ ৰ পৰা  $W$ লৈ এটা বৈধিক ৰূপান্তৰ। প্রমাণ কৰা যে  $T$ ৰ সাপেক্ষে  $V$ ৰ ছবিখন  $W$ ৰ এটা উপস্থান। 4

Let  $T$  be a linear transformation from  $V$  to  $W$ . Prove that the image of  $V$  under  $T$  is a subspace of  $W$ .

P25/1394

(Continued)

( 7 )

নাইবা / Or

ধৰা হওক  $T$  এটা ভেক্টৰ স্থান  $V$ ৰ বৈধিক ৰূপান্তৰ। প্রমাণ কৰা যে  $\{v \in V \mid T(v) = 0\}$ ,  $T$ ৰ কাৰ্নেল,  $V$ ৰ এটা উপস্থান।

Let  $T$  be a linear transformation of a vector space  $V$ . Prove that  $\{v \in V \mid T(v) = 0\}$ , the Kernel of  $T$ , is a subspace of  $V$ .

- (d) ধৰা হওক  $V$  আৰু  $W$  ভেক্টৰ স্থান, আৰু  $T: V \rightarrow W$  বৈধিক। যদি  $V$  সসীম-মাত্রিক হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে,

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

4

Let  $V$  and  $W$  be vector spaces, and let  $T: V \rightarrow W$  be linear. If  $V$  is finite-dimensional then prove that

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

নাইবা / Or

ধৰা হওক  $V$  আৰু  $W$  ভেক্টৰ স্থান আৰু  $T: V \rightarrow W$  বৈধিক। প্রমাণ কৰা যে  $T$  এক-এক যদি আৰু যদিহে  $T$ ৰ  $V$ ৰ বৈধিকভাৱে স্বাধীন উপগোটসমূহ  $W$ ৰ বৈধিকভাৱে স্বাধীন উপগোটসমূহৰ ওপৰত থাকে।

Let  $V$  and  $W$  be vector spaces and  $T: V \rightarrow W$  be linear. Prove that  $T$  is one-one if and only if  $T$  carries linearly independent subsets of  $V$  onto linearly independent subsets of  $W$ .

P25/1394

(Turn Over)

(e) ধৰা হওক  $\beta$  আৰু  $\gamma$  ক্ৰমে  $\mathbb{R}^2$  আৰু  $\mathbb{R}^3$ ৰ বাবে  
 প্রামাণিক ক্ৰমবদ্ধ ভিত্তি। তেন্তে  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  যাতে  
 $T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$

দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত বৈখিক ৰূপান্তৰ  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ৰ বাবে  
 মেট্ৰিক্স উপস্থাপন কৰা।

5

Let  $\beta$  and  $\gamma$  be the standard ordered  
 bases for  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$  respectively, then  
 for the linear transformation  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 defined by

$$T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$$

compute the matrix representation.

নাইবা / Or

ধৰা হওক  $V$  আৰু  $W$  এটা  $F$  ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত ভেক্টৰ  
 স্থান, আৰু  $T, U: V \rightarrow W$  বৈখিক। প্রমাণ কৰা যে

Let  $V$  and  $W$  be vector spaces over a field  
 $F$ , and let  $T, U: V \rightarrow W$  be linear. Prove  
 that

(i) সকলো  $a \in F$ ,  $aT + U$ ৰ বাবে বৈখিক;

for all  $a \in F$ ,  $aT + U$  is linear;

(ii)  $V$ ৰ পৰা  $W$ লৈ সকলো বৈখিক ৰূপান্তৰৰ সংগ্ৰহ  
 $F$ ৰ ওপৰত এটা ভেক্টৰ স্থান।

the collection of all linear  
 transformations from  $V$  to  $W$  is a  
 vector space over  $F$ .

★★★