Total No. of Printed Pages—7

4 SEM FYUGP MTHC4D

2025

(June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC4D

(PDE and System of ODE)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. (a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ ঘাত লিখা। 1

   Write the degree of the PDE $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

   (b) $y^2p-xyq=x(z-2y)$ সমীকৰণটোৰ লাগ্ৰাঞ্জৰ সহায়ক সমীকৰণ লিখা। 1

   Write the Lagrange's auxiliary equation for $y^2p-xyq=x(z-2y)$.

   (c) ৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা লিখা। 1

   Define linear partial differential equation.

(d) সমাধান কৰা (যি কোনো এটাৰ) :

Solve (any *one*) : 5

(i) $yzp + zxq = xy$

(ii) $z(x+y)p + z(x-y)q = x^2 + y^2$

2. (a) Charpitৰ পদ্ধতিৰে $p = (z+qy)^2$ সমীকৰণটোৰ সম্পূৰ্ণ সমাধান উলিওৱা। 5

Find the complete integral of the equation $p = (z+qy)^2$ by Charpit's method.

অথবা / Or

$p_3 x_3 (p_1 + p_2) + x_1 + x_2 = 0$ৰ সম্পূৰ্ণ সমাধান উলিওৱা।

Find the complete integral of $p_3 x_3 (p_1 + p_2) + x_1 + x_2 = 0$.

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = u$ সমীকৰণটোৰ কেনোনিকেল আকাৰত হ্ৰাস কৰা আৰু সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা। 6

Reduce the equation

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

to canonical form and obtain the general solution.

অথবা / Or

$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0, y) = 4e^{-2y}$ প্ৰাৰম্ভিক সমস্যাটোৰ চলক পৃথকিকৰণ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা।

Solve the initial value problem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \; u(0, y) = 4e^{-2y}$$

by the method of separation of variables.

3. (a) $Rr + Ss + Tt + f(x, y, z, p, q) = 0$ সমীকৰণটোৰ অধিবৃত্তীয় হোৱাৰ চৰ্ত লিখা। 1

Write the condition when the equation $Rr + Ss + Tt + f(x, y, z, p, q) = 0$ is parabolic.

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ সমীকৰণটো শ্ৰেণীভুক্ত কৰা। 2

Classify the equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ সমীকৰণটোক কেনোনিকেল আকাৰত হ্ৰাস কৰা। 5

Reduce the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

to canonical form.

অথবা / Or

সমাধান কৰা (solve) :

$$p+r+s=1$$

(d) একমাত্ৰিক তৰংগ সমীকৰণ উলিওৱা। 7

Derive one-dimensional wave equation.

অথবা / Or

চলক পৃথকীকৰণ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি একমাত্ৰিক তাপ সমীকৰণ সমাধান কৰা।

Solve one-dimensional heat equation by the method of separation of variables.

4. (a) দ্বি-মাত্ৰিক তাপ সমীকৰণৰ সাধাৰণ ৰূপ লিখা। 1

Write the general form of two-dimensional wave equation.

(b) চলক পৃথকীকৰণ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা : 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Solve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ using the method of separation of variable.

অথবা / Or

সমাধান কৰা (Solve) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

যেতিয়া / when

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \; u(x, 0) = \sin\frac{\pi x}{l}$$

5. (a) চলক সহগ থকা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ বৈখিক ব্যৱস্থাৰ উদাহৰণ লিখা। 1

Write an example of linear system of ODE with variable coefficient.

(b) $\dfrac{d^3x}{dt^3} + 2\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 2x = e^{3t}$ বৈখিক অৱকল সমীকৰণটো প্ৰথম বৰ্গৰ ব্যৱস্থা অৱকল সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰিত কৰা। 3

Transform the linear differential equation

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = e^{3t}$$

into system of first-order differential equation.

অথবা / Or

$2\frac{dx}{dt}+6\frac{dy}{dt}+7y=t$ সমীকৰণক স্বাভাৱিক ৰূপত লিখা।

Write the equation $2\frac{dx}{dt}+6\frac{dy}{dt}+7y=t$ into normal form.

(c) ধৰা (Let) $L_1 \equiv 2D+1$, $L_2 \equiv D^2+1$, $f(t)=t^3$ য'ত (where) $D \equiv \frac{d}{dt}$, দেখুওৱা যে (show that) $L_1L_2f=L_2L_1f$. 4

অথবা / Or

$\frac{dx}{dt}=6x-3y$, $\frac{dy}{dt}=2x+y$ ৰ সমাধানত জড়িত সমীকৰণটোৰ বৈশিষ্ট্যমূলক মূলবোৰ উলিওৱা।

Find the characteristic roots of the equation associated in the solution of

$$\frac{dx}{dt}=6x-3y, \quad \frac{dy}{dt}=2x+y$$

6. (a) অইলাৰৰ পদ্ধতি বৰ্ণনা কৰা। 5

Describe Euler's method.

অথবা / Or

$\frac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 1$ ৰ সঠিক সমাধানটোক সংযুক্ত কৰা ফলনটোৰ প্ৰথম দুটা আনুমানিক মান নিৰ্ণয় কৰা।

Find first two approximations of the function that approximate the exact solution of the equation

$$\frac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 1$$

(b) $\frac{dx}{dt} = 5x - 2y,\ \frac{dy}{dt} = 4x - y,$ সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা। 6

Find the general solution of the linear system of equations

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 2y,\ \frac{dy}{dt} = 4x - y$$

অথবা / Or

অপাৰেটৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা :

Using operator method, find the general solution of the following equations :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 3y = e^t$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = e^{3t}$$

★★★