Total No. of Printed Pages—7

2 SEM FYUGP MINMTH2

2025

(May/June)

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH2

(Real Analysis)

Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)

Time : 2 hours (3 hours for 2023 Batch)

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* তলৰ সংহতিটোৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা : 2

Find the supremum and infimum of the following set :

$$= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 25\}$$

(b) গণন আৰু অগণন সংহতিৰ সংজ্ঞা লিখা। 2

Define countable and uncountable set.

(c) প্ৰমাণ কৰা, যদি $a \in \mathbb{R}$ এনেকুৱা যে সকলো $\varepsilon > 0$ ৰ বাবে $0 \le a < \varepsilon$, তেন্তে $a = 0$. 3

Prove that, if $a \in \mathbb{R}$ is such that $0 \le a < \varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$, then $a = 0$.

(d) যদি $a, b \in \mathbb{R}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $a, b \in \mathbb{R}$, then show that

$$|a+b| \le |a| + |b|$$ 3

(e) যদি (If)

$$S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা $\inf S = 0$.

then prove that $\inf S = 0$. 4

অথবা / *Or*

প্ৰমাণ কৰা যে [0, 1] অন্তৰালত বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি অগণনীয়।

Prove that the set of real numbers in the interval [0, 1] is uncountable.

(f) $x \in \mathbb{R}$ ৰ বাবে সংহতি A নিৰ্ণয় কৰা য'ত $|2x+3| \le 7$. 1

Determine the set A of $x \in \mathbb{R}$ where $|2x+3| \le 7$.

2. (a) শূন্য অণুক্ৰম বুলিলে কি বুজা? 1

What do you mean by a null sequence?

(b) প্ৰমাণ কৰা যে এটা অভিসাৰী অণুক্ৰমৰ দুটা পৃথক সীমা নথাকে। 4

Prove that a convergent sequence cannot tend to two distinct limits.

(c) প্ৰমাণ কৰা (যি কোনো এটা) : 4

Prove that (any *one*) :

(i) $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} [1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \cdots + n^{1/n}] = 1$$

(ii) $$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right] = 1$$

(d) ক'চিৰ অভিসাৰী সম্বন্ধীয় সাধাৰণ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে $< U_n >$ অণুক্ৰমটো অভিসাৰী য'ত

Apply Cauchy's general principle of convergence to show that the sequence $< U_n >$ is convergent where

$$U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$ 5

অথবা / *Or*

প্ৰমাণ কৰা যে $< U_n >$ অণুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান আৰু উচ্চ পৰিবদ্ধ। ইয়াৰ সীমা নিৰ্ণয় কৰা য'ত

Prove that the sequence $< U_n >$ is monotonic increasing and bounded above. Find its limit where

$$U_n = \frac{3n+1}{n+2}$$

(e) এটা অণুক্ৰমৰ অভিসাৰিতা সম্বন্ধীয় ক'চিৰ সাধাৰণ সূত্ৰটো লিখা। 2

Write the Cauchy's general principle of convergence of a sequence.

(f) প্ৰমাণ কৰা যে $< n^2 >$ অণুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান। 3

Prove that the sequence $< n^2 >$ is monotonic increasing.

3. (a) যোগাত্মক শ্ৰেণী কাক বোলে? 1

What is called positive series?

(b) অসীম গুণোত্তৰ শ্ৰেণীৰ $a+ar+ar^2+\cdots$ ৰ অভিসাৰিতা আৰু অপসাৰিতাৰ চৰ্ত উল্লেখ কৰা। 2

State the condition for convergence and divergence of the infinite geometric series $a+ar+ar^2+\cdots$.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে এটা ধনাত্মক শ্ৰেণী

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\infty$$

অভিসাৰি যদি $p>1$. 4

Prove that a positive term series

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\infty$$

is convergent if $p>1$.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে এটা অসীম শ্ৰেণী $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ অভিসাৰী হ'বনে হ'লে $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\ u_n=0$ চৰ্তটো আৱশ্যকীয়। 4

Prove that the necessary condition for the convergence of an infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is that $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\ u_n=0$.

অথবা / Or

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা বা অপসাৰিতা আলোচনা কৰা :

Discuss the convergence or divergence of the following series :

$$\frac{2}{1^p}+\frac{3}{2^p}+\frac{4}{3^p}+\frac{5}{4^p}+\cdots$$

4. (a) ক'চিৰ মূল পৰীক্ষাটো বৰ্ণনা কৰা আৰু তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 1+3=4

State Cauchy's root test and examine the convergence of the following series :

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2\lfloor 2}{3^2}+\frac{x^3\lfloor 3}{4^3}+\cdots$$

(b) তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 4×2=8

Test the convergence of any *two* of the following :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} x^n, \ x>0$

(iii) $\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$

(iv) $\frac{x}{\sqrt{1}} - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} - \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \cdots$

(c) এটা অসীম শ্ৰেণী অভিসাৰি হোৱাৰ বাবে লিবনীজ পৰীক্ষাৰ চৰ্ত তিনিটা লিখা। 3

Write the three conditions of Leibnitz test for the convergence of an infinite series.

(২০২৩ বৰ্ষৰ পৰীক্ষাৰ্থীৰ বাবে ২০ নম্বৰৰ অতিৰিক্ত প্ৰশ্ন)

(Additional 20 marks for 2023 Batch)

5. দেখুওৱা যে পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি গণনাকৃত। 5

Show that the set of rational numbers is countable.

6. অণুক্ৰমৰ অভিসাৰিতাৰ ক'চিৰ সাধাৰণ সূত্ৰটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা। 5

Establish Cauchy's general principle of convergence of sequences.

7. শ্ৰেণীৰ বাবে ক'চিৰ সাধাৰণ অভিসৰণ নীতিটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা। 5

Establish Cauchy's general principle of convergence of series.

8. n-তম পদ $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ শ্ৰেণীৰ বাবে আচৰণ পৰীক্ষা কৰা। 5

Investigate the behaviour of the series whose n-th term is $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

★★★